

טטרה-פק

אשכול משימות



חיבור לתוכנית הלימודים: גיאומטריה במרחב
קהל יעד: כיתות ח'-ט'
משך הפרוייקט/ המשימה: 6-10 שבועות (2 ש"ש)

תוכן PISA: מרחב וצורה, כמות, שינוי ויחסים
הקשר PISA: תעשייתי, מדעי
הקשר פרקטימטיקה: תעשיית מזון, עיצוב

ד"ר אליק פלטניק ואפרת מדסון גרוסמן, האוניברסיטה
העברית



כותרת הבעיה

כיתות ח'-ט' | גופים תלת מימדיים | שטח והיקף | משפט פיתגורס |
מישורים מקבילים ומאונכים | מרחק | פריסות

טרה-פק או המצאת אריזות חלב גאונית

גילוי תכונות גיאומטריות של פירמידה משולשת בהקשר תעשייתי-
חברתי באמצעות גילוי מחדש של שיטת אריזה ואחסון מהפכנית -
טרה פק. (משנות ה-1950 למאה ה-21)

רובן ראוסינג נולד בשבדיה בסוף המאה ה-19. בשנות ה-20 של המאה ה-20 הוא למד כלכלה בניו יורק והתוודע למכולות בשירות עצמי, כלומר מוצרים ארוזים - דבר שלא היה נפוץ בזמנו באירופה. הוא החל להתעניין בעולם האריזות ובמהלך השנים הבאות, כאשר חזר לשבדיה החל לייצר אריזות קרטון למזון יבש. בהמשך ניסה למצוא פתרון לאריזת מוצרים נוזליים כגון חלב. באמצע שנות הארבעים כבר המציא אריזת קרטון מצופת פלסטיק בצורת פירמידה משולשת (טרהדרון, ארבעון) ורשם על כך פטנט, אך רק בשנת 1952 הצליח סוף סוף לייצר ולמכור את המכונה הראשונה למחלבה.

המחלבה של ראוסינג בחלב נבע מסיבות רבות והוא חשב שתהיה לזה דרישה רבה בגללן - וצדק. ת ראוסינג היא כיום אחת המשפחות העשירות באירופה בגלל המצאה זו. לשים לב כמה זמן הוא השקיע בפיתוח המוצר עד שהצליח לייצר מוצר ראוי למכירה.

רקע למורה

- חומרים למורה

- מצגת איך המצאה גאונית שינתה את פני עולם אריזות החלב. המצגת מלווה בהערות למורה
- סרטון הכנה: pyramid from a tube
- סרטונים מארכיוני TetraPak: הסרט התיעודי של שנות החמישים: From the Tetra Pak® archive: The first Tetra Pak film (1950s)
- From the Tetra Pak® archive: Tetra Pak - the key to modern distribution
- יישומון גיאומטרי: <https://www.geogebra.org/m/txeprqsw>
-

מוצר זה מעניין מתמטית בשל תהליך ההכנה שלו: רצועת קרטון-פוליאתילן מודבקות לצינור בתהליך בלתי פוסק וחלב נמזג ברציפות לצינור אנכי. הצינור נלחץ מרותך תרמית בקו הלחיצה. ואז הוא נלחץ באותה צורה ומרותך מעט גבוה יותר, אך עם סיבוב התפר השני ב 90 מעלות במישור המקביל. תוך כדי לחיצה כפולה במישורים שונים, הצינור מתקפל לפירמידה. התוצאה היא סרט של פירמידות מלאות במוצר (חלב) שנחתכות באמצע התפרים.

מבחינה מתמטית המעבר מגליל לפירמידה הוא מפתיע ואינו טריוויאלי. כמו כן, ישנם עוד נושאים מתמטיים נוספים מעניינים שקשורים בצורה ישירה להמצאה הזאת. למשל: ניצול מקסימלי של נפח, שטח ומשקל בהובלה. שיכון של פירמידות במרחב בתוך גופים תלת מימדיים. תכנון מימדי מיכל בהתאם לדרישת הנפח ועוד.

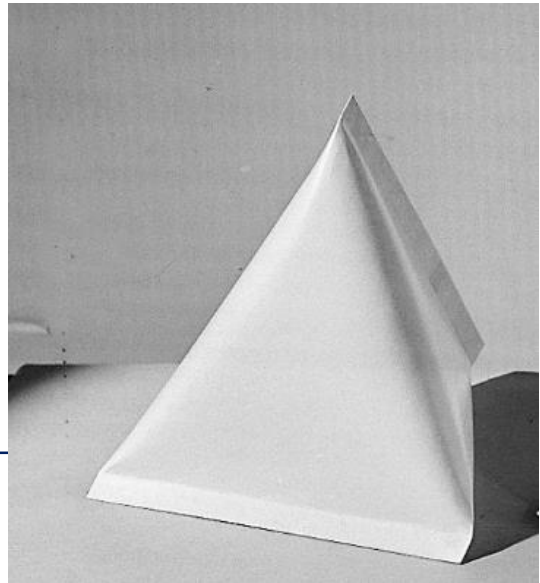
בנוסף, בסיפור זה ישנן זוויות שונות מעניינות בתחומים שונים, אותן אפשר לחשוף לתלמידים על ידי שאילת שאלות ויצירת דיון. בין יתר הנושאים: כלכלה ואיכות הסביבה, פוליטיקה של תרבות הידע ומגדר, ביולוגיה וקולינריה.

הצעות לפעילות

ניתן למצוא הצעות לפעילויות ולדיונים בהערות למורה הנמצאות לאורך המצגת.
בנוסף, להלן הצעה מפורטת:

- המשימה הראשונה של התלמידים היא ליצור (תוך 15 דקות) מודל של מיכל חלב תוך שימוש בשטח גדול ככל האפשר של דף בריסטול (572 מ"מ × 724 מ"מ). על התלמידים לציין באיזה אחוז מנייר בריסטול השתמשו.

איור 1: הכרטיס אשר ניתן לתלמידים בתחילת הפעילות. צורת מיכל זה היא פירמידה משולשת



- לרשות התלמידים כמה בריסטולים, נייר A4, כלי ציור, מספריים, מקלות דבק, מהדקנים, מהדקי נייר, פסי חוטים, סרגלים גדולים וקטנים, מצפני ציור, מחשבוניס.



- אנו מצפים כי התלמידים יתמודדו עם כמה אתגרים: מעבר מתצוגה דו-ממדית ותיאור טקסטואלי למודל תלת-ממדי, מעבר מפעולות במיקרו-מרחב לפעולות במרחב. המשימה מאפשרת פתרונות מרובים עם תערובות שונות של גישה נאיבית ומדעית. אנו מצפים כי פתרונות התלמידים יכללו טכניקה מסוימת של גזירה או קיפול תוך שימוש בפריסות טטרהדרון (איור 2).

איור 2: שתי פריסות
טטרהדרון אפשריות

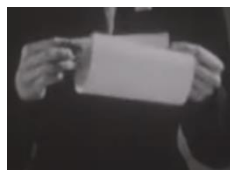


- לאחר 15 דקות התלמידים יציגו את הדגמים שלהם, את היחס המחושב (המשוער) בין שטח נייר בריסטול לשטח הפנים של המודל הבנוי, והצדקות שלהם. בכך מסתיים החלק הראשון של הפעילות.



• שלב ב'

- החלק השני של הפעילות (30-45 דקות) מתחיל מיד לאחר מכן. בפני התלמידים קלף שני, המציג תהליך היווצרות מיכל חלב (סביר להניח שהתלמידים בחלק הראשון לא ימציאו שיטה זו, אך בידה וכן ניתן לתת להם כרטיס עם פריסה השניה). ניתן להציג את סרטון ההדגמה [pyramid from a tube](#).
- הפעם משימתם של התלמידים היא לבנות מודל של מיכל חלב לפי שיטה זו שיהיה הטטרהדרון הרגיל (כלומר טטרהדרון בו כל ארבעת הפנים הם משולשים שווים צלעות) תוך שימוש רב ככל האפשר מלוח בריסטול (572 מ"מ × 724 מ"מ). עליהם להסביר את השיטה המבטיחה כי המודל של מיכל חלב הוא אכן טטרהדרון רגיל. לרשותם יהיו אותם כלים כמו החלק או החלק הראשון של המשימה וגם המודל שלהם.
- אפשר להקל על התלמידים ולתת מספר גילוי נייר (בסיס של מגבת נייר או נייר טואלט).

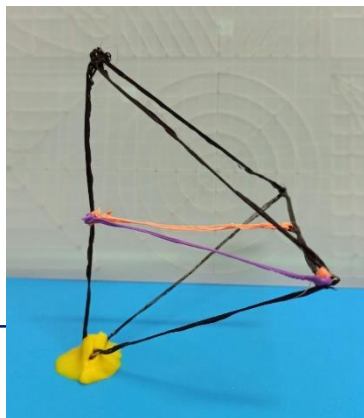


איור 3: הקלף השני אשר ניתן לתלמידים. הכרטיס מציג דגם של קיפול תעשייתי של מיכל חלב כפי שהומצא בשנות הארבעים במעבדה



- אנו מצפים כי בנוסף למה שתלמידים עשו בחלקן הראשון של הפעילות, התלמידים יצטרכו להשלים מודל נייר לא שקוף עם מודל מסגרת. מודל לא שקוף מביא מראש את התמקדות התלמידים בשטח הפנים, ומודל מסגרת מאפשר קונסטרוקציות עזר בתוך המודל. עם זאת, ישנם כמה פתרונות שאולי אינם כוללים מודל מסגרת קווית.

איורים 4.1, 4.2:
האפשרויות שונות של
שני סוגי הדגמים "לא
שקוף" ו"מסגרת- שלד":
התמקדות בשטח הפנים
או במבנה ובמקצועות.



פתרון לפירמידה משולשת משוכללת (טטרהדרון רגיל):

למעשה אנחנו מנסים למצוא את אורך הגליל, או רוחב הגליל אם מתחילים מגליון. באיור 4.2 זהו הקטע (מוט) הכתום.

כאשר משטחים את הגליל, אורך מקצוע של הפירמידה (E) שווה למחצית מהיקף הגליל (C).

$$E = \frac{C}{2} = \frac{2\pi r}{2} = \pi r. \quad (\text{איור 4.2})$$

גובה של פאת הטטרהדרון, כגובה משולש שווה צלעות (האורך של המוט הסגול):

$$H = \sqrt{(\pi r)^2 - \left(\frac{\pi r}{2}\right)^2} \quad \circ$$

$$H = \frac{\pi r \sqrt{3}}{2} \quad \circ$$

לבסוף, המרחק בין שני המישורים, כלומר המרחק בין שני המקצועות נגדיים של הטטרהדרון

$$D = \sqrt{\left(\frac{\pi r \sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi r}{2}\right)^2} \quad (\text{האורך של המוט הכתום}):$$

$$D = \frac{\pi r \sqrt{2}}{2} \quad \bullet$$

לכן, אם אנו יודעים את הרדיוס r של הגליל, בכל פעם שנשטח את הגליל כפי שמוצג בסרטון והמרחק בין

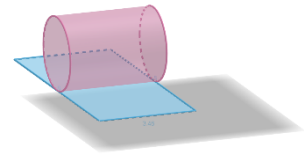
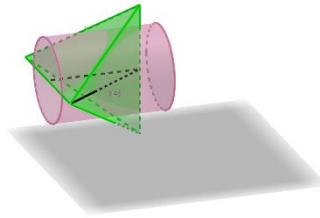
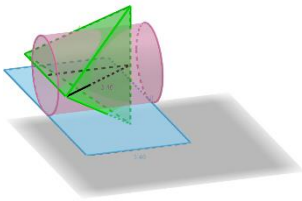
הידיים בסוף התהליך יהיה $\frac{\pi r \sqrt{2}}{2}$, הפירמידה המתקבלת תהיה טטרהדרון רגיל.

הקשר בין מספר מדדים פנימיים למיכל הטטרהדרון:

$\frac{\pi r \sqrt{4}}{2}$	אורך מקצוע של הטטרהדרון:
$\frac{\pi r \sqrt{3}}{2}$	גובה של פאת הטטרהדרון:
$\frac{\pi r \sqrt{2}}{2}$	המרחק בין שני מקצועות נגדיים (הגיבור שלנו):

וריאציה

צרו פירמידה תוך (0.87M X M למשל 4) $a * \sqrt{3} / 2$ בהינתן מלבן נייר בעל הממדים 4 שימוש בנייר רב ככל שתוכל.



שלוש צורות יחד. שימו לב שגובה פני הטרהדרון שווה לרוחב הבריסטול.	מהגליל לטרהדרון.	ממלבן לגליל

אפלט בגיאוגברה עם האיורים לעיל <https://www.geogebra.org/m/txeprqsw>



הצעה נוספת

בעזרת שימוש במצגת נוספת (מצ"ב) אפשר להציג את הסיפור כולו, תוך כדי יצירת דיונים בכיתה ופעילויות בהתאם לרמת הכיתה כפי שמוצעות לעיל ובהערות במצגת [איך המצאה גאונית שינתה את פני עולם אריזות החלב](#) מומלץ לצפות בסרטונים של חברת טרה-פאק לעיל ולשלבם בשיעור.



דוגמאות לפרוייקטים שנעשו על ידי תלמידים

- חקירת הקשר בין נפח פירמידה מרובעת לתיבה בעלת אותו בסיס וגובה. שימוש בהמחשות פיזיות (בניה מחומרים שונים) ומדידות נפחים מקוריות. מה שסקרן את התלמידות והן חקרו אותו זה איך אפשר לראות שנפח הפירמידה הוא אכן שליש מנפח התיבה.
- הוכחה ללא מילים של משפט פיתגורס
- ריצופים ארכימדיים והוכחת אי קיום ריצוף סמי משוכלל בעל 4 מצולעים שונים
- ניתוח מתמטי של גבישים (כימיה) על פי סימטריות סיבוביות בהשראת ריצוף מחזורי. ריצוף פנרוז וגביש כמו מחזורי (קוואזיפריודי) של דן שכטמן (סקירה)
- בהמשך לבעית הפיכת מלבן לפירמידה, הועלתה על ידי התלמידות השאלה האם זה יהיה אפשרי ששתי צלעות המלבן ואורך מקצוע הפירמידה הן מספרים שלמים והן הוכיחו שזה בלתי אפשרי.
- ניתוח סימטריות בריצוף בעל צורות שאינן מצולעים (בסגנון אשר) לא טריוויאליות, מבוסס על ריצוף משוכלל.
- חיפוש ריצופים מחומשים: בעזרת ניסוי וטעיה חיפוש מחומשים אשר ריצופם סביב כל קודקוד זהה (יוניפורמים). בעזרת מידע חיצוני מיפוי כל ריצופי המחומשים האפשריים והוכחת קיומם הבלעדי.
- פירמידות המשוכנות בתוך מנסרות/גופים תלת מימדיים אחרים: חיפוש מימדי הפירמידות המשוכנות בתוך קוביה, חיפוש התכנות בתוך גופים תלת מימדיים שונים (כאשר הפירמידות תמיד חופפות בכל סידור)
- ריצוף משושים בתוך שטח מלבני נתון (בהשראה מתיבות טטרה- פק בתוך משאית)
- חקר הגוף קפסולה (גליל ושני חצאי כדור) שבא בעקבות הנקניקיות שבמצגת: מציאת נוסחאות לנפח ושטח פנים. מציאת נוסחה למציאת מקטע בעיגול (שטח החסום ע"י קשת ומיתר)

הצעות לכיווני המשך

בניית וכוונן המכונה במפעל

- בהינתן נפח רצוי וצורת פירמידה משוכללת
 - מה רוחב הגליון הדרוש
 - בהנתן קצב מסוים של תנועת הגליון, מה קצב ההפעלה של הידיות הסוגרות. שאלות עזר:
 - האם קצב תנועת החלב והגליון מסונכרנים
 - מה המרחק בין הידיות הסוגרות את המיכל בחוסר תנועה
- חישוב כמות הנייר לליטר חלב באריזות השונות - שטח פנים. (עוזר לחישוב עלויות)
 - איזו פירמידה משולשת היא המנצלת את הנייר באופן אופטימלי
 - בהנתן נפח רצוי ורוחב גליון, לחשב את כל הדברים לעיל (מיקום סוגרים ביחס לקצב)
 - אם אורך ורוחב של דף קרטון הם מספרים שלמים, האם ניתן לבנות פירמידה משולשת שאורך המקצוע שלה גם מספר שלם? (הבעיה שהציעו התלמידות לעיל).

אריזה ושינוע

- כיצד צריך להיראות ארגז לאחסון למיכלי חלב בצורת פירמידה משולשת משוכללת? הציעו מודל שלכם. (לפני שרואים את הסרטון)
- למה ארגז עם בסיס משושה משוכלל יעיל יותר?
- אריזה במנסרות משושות:
 - מהן המידות של המנסרה (סלסלה) ביחס למיכל
 - כמה מיכלים נכנסים במנסרה אחת (סלסלה)
 - כאשר המיכל הוא פירמידה משולשת משוכללת
 - מה קורה כאשר המיכל אינו פירמידה משוכללת
- אריזה בתיבות/קוביות
 - כמה פירמידות משולשות בדיוק באותו גודל (לפחות מקצוע אחד באורך צלע קוביה) נכנסות בקוביה?
 - איך זה משפיע על המידות של המיכל? (מה צריך לשנות במכונה שכבר מכוונת על פירמידה משוכללת למשל)
 - היחס בין שינוע במנסרות משושות לשינוע בקוביות - כמה חסכון זה מבחינת מקום?
 - האם אפשר לארוז פירמידות במנסרה אחרת (חוץ ממשושה וריבוע)?
 - בהשוואה לבקבוק זכוכית בנפח שווה כמה שוקל מיכל של קרטון? מה הרווח במונחים של משאית של 3 טון?



הצעות לכיווני המשך נוספים

נושאים מתמטיים נוספים לחקירה

פאונים

- משוכללים
- סמי משוכללים
- פריסות של פאונים
- הקשר בין פאונים למבנים מולקולריים ידועים או גבישי מינרלים
- מעבר מריצוף לפאונים, ע"י "הקטנת" הזווית בצומת

ריצוף

- משוכלל
- סמי משוכלל
- ריצוף מחומשים
- פעולות תנועה במישור
- סימטריות במישור (אפשר גם דרך חבורות)
- ריצוף פנרוז וגביש כמו מחזורי (קוואזיפריודי) של דן שכתמן
- שימוש [בגיאוגברה](#) לבניית 3 מבנים תלת מימדיים בעלי מאפיינים משותפים
- הדפסה על קרטון, תוך שימוש בצבעים שונים ועיצובים שונים. כיצד לחסוך בעלויות של הדפסה על מיכל בצורת פירמידה?

נושאים נוספים לחקירה שאינם מתמטיים במובהק/בלבד

- טטרה פאק ואיכות הסביבה -קריטריונים לבדיקה והשוואה בין המוצרים השונים לאריזת חלב.
- המצאות (נוספות) בהשראת ידע מסורתי
- מדוע אריזות טטרה-פאק אינן דורשות קירור?
- בעלות על הידע - ניכוס גילויים והמצאות של נשים על ידי גברים (סיפורי מקרה) או של בעלי מעמד נמוך על ידי בעלי מעמד גבוה.
- האריזה הקלאסית היא לא הכי שימושית היום. האם יש בסיס מתמטי להחלטה?

